EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN IN BINNEN- EN BUITENLAND

37e JAARGANG 1961/1962
I - 1 SEPTEMBER 1961

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

WELKE ONTWIKKELINGSMOMENTEN ZIJN ER IN HET WERK VAN DE WISKUNDE WERKGROEP VAN DE AFGELOPEN 25 JAAR OP TE MERKEN?

door

Drs. H. J. JACOBS Jr. [1])

Mijnheer de Voorzitter, mijnheer de Inspecteur, Dames en Heren genodigden, Dames en Heren leden van de Wiskunde Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs.

Op mij rust vanmiddag de vererende taak een terugblik te mogen geven omtrent het werk van de Wiskunde-Werkgroep. Een terugblik, niet zo zeer gegoten in de vorm van een chronologisch verslag omtrent het gebodene, maar meer gericht op een nauwkeuriger belichten van enkele momenten uit de afgelopen periode die kenmerkend zijn geweest voor de stuwende kracht van de leden van deze groep, als wel die van betekenis waren of zijn voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in de laatste kwarteeuw. Een deel van wat ik hedenmiddag U zal zeggen kunt U in één of andere vorm terugvinden in het nummer van het maandblad Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs [2]), dat U heden ter gelegenheid van dit 25 jarig jubileum zal worden aangeboden.

De Wiskunde-Werkgroep werd op 20 april 1936 opgericht en op 4 juli van datzelfde jaar vond de eerste samenkomst plaats. Met grote regelmatigheid vonden besprekingen plaats waarbij steeds meer personen in het werk werden betrokken. De oorlog onderbrak dit vaak baanbrekende werk reeds in 1939 en het werk lag stil. Na de tweede wereldoorlog werd het contact echter weer snel opgenomen en op 15 juni 1946 begon de groep zijn tweede deel van

---

[1]) Inleiding gehouden op de feestelijke samenkomst t.g.v. het 25 jarig jubileum v.d. werkgroep op 15 april 1961.

[2]) Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, no. 183, april 1961, uitgave J. Muusses te Purmerend.

zijn bestaan. Sindsdien zijn zonder onderbreking en met zeer grote regelmaat contacten gelegd en werk verricht.

Hoewel er zeer duidelijk een doorgaande lijn te zien is in het werk van voor de oorlog en dat van na 1945 wil ik toch beide perioden afzonderlijk bespreken, waarbij U het me naar ik hoop niet kwalijk zult nemen dat ik het accent zal laten vallen op de periode vanaf 15 juni 1946. Op die datum werd mij n.l. verzocht voorlopig het secretariaat van de groep waar te nemen en ook hier blijkt weer dat niets permanenter is dan het tijdelijke, want dit zal dus heden over twee maanden juist 15 jaar geleden zijn.

Daar ik niet aanwezig geweest ben, zelfs niet kon zijn in verband met mijn toen wel jeugdige leeftijd, bij de vooroorlogse besprekingen moet ik me geheel en al op de aanwezige schriftelijke gegevens beroepen. Ik vroeg me vaak af, hoe zou toch de sfeer in deze samenkomsten geweest zijn, was deze anders, was het werk dat gedaan werd efficiënter enz. enz. U weet het, leden van de werkgroep die tegenwoordig onze samenkomsten bezoeken: het kan wel eens voorkomen, dat gevoel zult U evenals ik wel eens hebben, indien U na een samenkomst op zaterdagmiddag naar huis gaat: wat een geharrewar, wat heb ik hier nu aan gehad. Maar ik lees hier een brief aan de toenmalige secretaresse van 28 september 1938 van een lid:

„Ja het was chaotisch, U heeft gelijk, maar ik vond het chaotische geen ramp, omdat het bewijst, hoe weinig alles nog gefundeerd is en hoe nodig nog veel samen te spreken is, voor we aan vormgeving toe zijn".

En toen ik dat las, was ik gerustgesteld, omdat ik ineens voelde, dat de sfeer toen en nu dezelfde moet zijn geweest en is gebleven, hoewel de personen gedeeltelijk zijn veranderd en de grootte van de groep is uitgedijd. En tegelijk beklemtonen deze woorden niet zozeer een ontwikkelingsmoment, maar een algehele gedachte, die steeds weer terugkomt en die m.i. als „Leitmotiv" kan gelden van het gehele werk in deze 25 jaar: het zoeken naar een fundament, het zoeken naar richtlijnen die uitgaan boven het nog te vaak gehoorde: ik doe het zus of zo en ik voel me er wel bij.

De werkgroep begon met de meetkunde en vroeg zich onmiddellijk af of het aantal stellingen niet te uitgebreid is en te omvangrijk was, hoe men tot een beperking kon komen. Men maakte een lijst met stellingen en ging daarin schrappen. Het is verrassend te lezen, dat men tweemaal ging schrappen, nl. *a.* beperking met het oog op het eindexamen en *b.* hetzelfde maar als wenselijkheid op zich, afgezien dus van het eindexamen. Was de gedachte niet erg reëel?

Maar toen kwam Mevrouw Ehrenfest en zij veegde het werk van tafel en zei: „Zo niet, men moet een ander uitgangspunt nemen, niet het oude boek, maar een werkelijk uitgangspunt" en zij stelde haar bekende stamboom op, waarbij ze liet zien welke stellingen in de vlakke meetkunde noodzakelijk zijn, indien men zich als einddoel het oppervlak van de cirkel stelt. Dit bracht een ommekeer in het werk van de groep en in verschillende samenkomsten heeft men zich met deze nieuwe problematiek bezig gehouden. Ook de stamboom van stellingen met als einddoel de inhoud van een bol kwam aan de orde (stereometrie). Het is moeilijk na te gaan, welke gedachten hierbij ter sprake kwamen, doch het feit dat men zich daarna intensief ging bezighouden met het doel van het wiskunde-onderwijs, dat tenslotte uitliep op de, nu nog vaak aangehaalde inleiding van Dr. E. W. Beth, Doel en zin van het meetkunde-onderwijs[3]) doet vermoeden, dat dit regelrecht is voortgekomen uit de discussie n.a.v. de stamboom van Mevr. Ehrenfest. Dit ontwikkelingsmoment is m.i. waard genoemd te worden, ook al beklaagt Mevr. Ehrenfest er zich wel eens over, dat haar stambomen uiteindelijk zo weinig effect hebben teweeggebracht.

Men kan zich de vraag stellen, of uit het werk van de vooroorlogse leden van de Werkgroep niet een boek, een leer- of werkboek ontstaan is, zoals dit in de naoorlogse periode zeer duidelijk aanwijsbaar is. Dit is niet het geval, alhoewel ik hier in een brief lees:

„tenslotte wil ik U even vertellen, dat Dr. Reindersma er ook was en ons heeft aangemoedigd vooral door te gaan, al is alles nog niet zuiver gefundeerd op de filosofie van Prof. Kohnstamm, begin maar, schrijf een boek, het kan altijd later verbeterd worden. Ik had het gevoel dat hij erachter wou zeggen: mijn kinderen. Het stak ons een hart onder de riem en met deze woorden in de oren durf ik U ook deze brief te schrijven."

Neen, een boek kwam er niet uit in die tijd. Men experimenteerde veel met materiaal op kaarten of op andere wijze in kleinere porties geordend, maar over de principes praatte men en bezon men zich. Ik laat hier weer een tweetal citaten horen uit twee brieven:
„Principes, waarover wij het eens zijn of worden. Die vormen de hoofdzaak. En ieder moge zich dan uitleven in het vervaardigen van een eigen verzameling oefenstof voor de kinderen. U heeft het toch zelf gemerkt, hoe heerlijk juist dat laatste is. Men legt er zijn gehele persoon in, zijn liefde. Maar wat voor de één de enige weg is, is voor de ander een moeilijk begaanbaar pad."

---

[3]) Verslag van de vergadering van de Wiskunde Werkgroep van 27 november 1937 Euclides XIV., blz. 236—243.

En uit een andere brief, aan Prof. Kohnstamm gericht: „Juist als het hen niet eerst voorgekauwd wordt, maar hij door zelfwerkzaamheid zelf het probleem als zodanig moet ervaren en dan pogen op te lossen, zal men een veel zuiverder oordeel over interesse kunnen krijgen. Daartoe is echter nodig, behalve een opzet van de curcus (een basis dus om vanuit te gaan) zekere normen, waaraan wij de cursus als geheel en ieder vraagstuk in het bijzonder moeten toetsen. Normen die psychologisch verantwoord zijn. U noemde er al één in Uw lezing, nl. de vragen moeten het kind voor een decisie stellen, niet moet er maar één antwoord mogelijk zijn. Ik denk dat U er zo vele zult willen stellen".

Uit deze en andere citaten moge U duidelijk zijn, hoe de pioniers van de werkgroep, allen stammende uit nieuwe scholen (Montessori-Lyceum, IVO-school, De Werkplaats en nieuwe Lycea) aan de zelfwerkzaamheid reeds toen een zeer grote rol wilden toebedelen. Ook toen waren er leden die de „oude school" zeer hekelden: ik citeer „De WVO is m.i. op een verkeerde weg als zij naar Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs streeft in het kader van de oude school. Zij doet nutteloos werk, omdat zij en ook nog anderen de oude school met hun docerende leraar tot uitgangspunt nemen. Neem het nieuwe leerplan (brief van 27-3-'38!), nieuw?, meer dan 10 jaar geleden werd het reeds opgesteld, de nieuwe stof vraagt nog meer doceren en nog meer doceertalent. Men zag de stof, men zag de docent, men zag het kind niet. Natuurlijk, de bestaande school vormde het encadrement waarin het nieuws ingelijst moest worden".

Dames en Heren, lang heb ik reeds bij het schilderen van de vooroorlogse sfeer in de groep stilgestaan. Ik mag dit gedeelte van mijn betoog besluiten te vermelden dat drie commissies de volgende onderwerpen in studie namen:

1. de uitwerking van een propaedeuse op de grondslagen van die van Mevr. Ehrenfest,
2. ter uitwerking van een meetkundecursus die aangrijpt op wat het kind kan en wat zijn belangstelling heeft,
3. ter vaststelling van een minimumprogramma.

Veel van dit commissiewerk werd door de oorlog gestaakt. De heer Van Albada werkte echter in de oorlog een propaedeuse uit en als ik dus in het begin van mijn verhaal U zei dat de lijn doorgetrokken werd, dan slaat dit hierop, dat hij op de eerste samenkomst na de oorlog nader op deze propaedeuse inging.

Ik mag dit vooroorlogse zeker niet besluiten, zonder te wijzen op de bijdrage, die een deel van de werkgroep verleende aan het werk van het Nutsseminarium voor Paedagogiek (commissie Kohnstamm), die zich bezig hield met aansluitingsproblemen L.O.-M.O. Een werk, dat dank zij de Mededelingen no. 33 en 37 van het Nutsseminarium voor Paedagogiek voor allen behouden is gebleven.

Een werk, dat zij het dan in een wat ander verband nog steeds door het Nutsseminarium wordt verricht.

Ik ben nu gekomen, D. en H., op de naoorlogse periode. Een periode, die de meesten van ons geheel of grotendeels wel hebben meegemaakt. De eerste samenkomsten hadden een duidelijk oriënterend karakter, nieuwe figuren, ik bedoel personen die in de vooroorlogse periode niet of nauwelijks naar voren waren gekomen, kwamen nu met hun gedachten en met hun werk, ik noem hier de namen: Van Hiele, Dr. Bunt, Timmer, de dames Boekhoff, Geursen, Prof. Freudenthal en nog vele andere. Doch ook de „oudjes" lieten weer van zich spreken: Prof. Minnaert, Mevr. Ehrenfest, Janssen, Struik e.a.

Op de onderwerpen die aan de orde kwamen wil ik hier niet nader ingaan. Ik wil graag stilstaan bij een moment, dat m.i. weer typerend was, zonder dat het aan de verdere gang van zaken een wezenlijke bijdrage heeft geleverd.

Plots kwam het plan naar voren om een aantal vraagstukken samen te stellen, die als norm zouden kunnen gelden voor leerlingen met een wiskundige ontwikkeling die overeenkomt met de eindexamens H.B.S.-b en Gymnasium-β. Duidelijk werd bepaald dat het niet de bedoeling was een gebruikelijke eindexamenopgave te maken, maar één na een vorming, zoals de maker die als ideaal zag. Het doel was duidelijk: we hoopten hierdoor een beeld te krijgen van dat ideaal. U ziet een geheel ander uitgangspunt dan de 250 opgaven van de Wimecoscommissie die een aantal opgaven samenstelde gebaseerd op een leerplan, dat daarvóór tot stand was gebracht.

Dit werk waar verschillende leden hun krachten aan hebben gewijd, werd afgesloten nadat de groep tot de conclusie kwam dat deze werkwijze niet urgent was voor de Vernieuwing van de Wiskundedidactiek en -methodiek. De heer Timmer gaf van deze vraagstukken en hun achtergronden een overzichtsartikel in Vernieuwing no. 62 van maart 1949.

Bovendien, en dit was waarschijnlijk nog een krachtiger argument,

was men sterk onder de indruk gekomen van een lezing van Prof. Minnaert van 7 febr. 1948 met als onderwerp: „Desiderata voor het M.O. in de wiskunde". Hierbij propageerde hij een sterke vereenvoudiging van de leerstof en het buiten boord zetten van veel van de bijkomstigheden. Hij trok een parallel met de natuurwetenschappen, waar slechts enkele van de vele stellingen en wetten het belangrijkste zijn. De vraag kon echter gesteld worden: welke dan, in de wiskunde? Hij liet daarna de algebra, de goniometrie, de meetkunde en de analytische meetkunde de revue passeren en ging na, wat uit deze vakken in de praktijk werd gebruikt. Ik meen niemand te kort te doen, als ik deze inleiding noem als het begin van de gedachte die langzamerhand vorm begon te krijgen om te komen tot een nieuw programma. Dat in deze discussie ook Prof. Freudenthal en Mevr. Ehrenfest zich sterk mengden, was natuurlijk te verwachten, terwijl ook schriftelijke suggesties van Prof. Mannoury een rol speelde. De werkgroep ontwikkelde ineens een sterke activiteit op verschillende fronten en tijdens deze bloei kwam het eerste moment van bezinning tijdens het eerste conferentie-weekend van 13 en 14 november 1948 [4]).

De samenkomst die hierop volgde (11-12-'48) en waar de zojuist gepromoveerde Dr. Mooy over enkele van zijn didactische onderzoekingen sprak, bracht het besluit om een viertal commissies in te stellen die zich zouden bezighouden met het vaststellen van een nieuw programma voor H.B.S.-b en Gymnasium-β. (Algebra en Diff. en Integraalrekening) Stereo- en Planimetrie, Goniometrie en Analyt. Meetk. Dit ontwikkelingsmoment in het bestaan van de werkgroep is m.i. van zeer groot belang geweest en heeft grote invloed uitgeoefend op de verdere gang van zaken. Een gedetailleerd verslag over de besprekingen die hierop volgden, hoop ik hier achterwege te mogen laten, één en ander werd besloten in een uitvoerig rapport dat als brochure no. 3 in 1952 het leven zag [5]).

Eén bepaalde bijzonderheid moge ik hier uit het geheel lichten, omdat de historische ontwikkeling in dit verband in zekere zin zo verassend is geweest. Ik doel hier op de plaats van de Beschrijvende meetkunde op de H.B.S. Prof. Freudenthal had reeds verschillende malen in werkgroepvergaderingen gepleit door afschaffing

[4]) Tijdens dat weekend besprak Prof. Freudenthal een onderwerp van hoger standpunt bezien, Dr. Bunt sprak over de keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde en van Hiele over richtlijnen op te stellen voor een didactiek der Wiskunde.

[5]) Het wiskunde-programma voor het VHMO, Brochure uit de Wiskunde Werkgroep no. 3 Uitg. J. Muusses te Purmerend.

van de BM. en vervangen door dit vak door AM. door de krachtige verdediging van de BM, i.h.b. door Dr. Wansink, was het tot een algemene uitspraak nog niet gekomen. Een enquête gericht aan alle wiskunde-hoogleraren van de TH en de hoofdinstructeur leverde op, dat deze niet graag de BM afgeschaft wilden zien, hoewel tegelijk een telegram van de instructeurs een tegengestelde mening opleverde. Een paleisrevolutie dus in Delft? Neen D. en H., zover kwam het gelukkig niet: een knap betoog van Dr. Wansink, een kritisch betoog van Prof. Freudenthal en het instellen van een BM-commissie, die als programmapunt tenslotte stelde:

,,In de BM (Constructieve meetkunde) wordt van de constructies, die in de stereometrie ter sprake komen een methode geleerd, die in staat stelt deze constructies in het tekenvlak uit te voeren met passer en liniaal'', was 't toenmalige eindpunt van een bewogen tijd.

Dat de Monge-projectie ook in het programma van de Wimecos-leerplancommissie tenslotte als afzonderlijk leervak is vervangen door de AM, is een besluit van deze tragicomedie, dat zowel de goedkeuring van de werkgroep als van Dr. Wansink, voorzitter van de Wimecos-commissie, heeft mogen wegdragen.

U weet, het werk van de werkgroep werd enkele jaren volkomen in beslag genomen door langdurige discussies over de voorgestelde programma's. Toch wil ik enkele gebeurtenissen noemen, die daarnaast nog als ontwikkelingsmomenten kunnen worden genoemd.

Was het b.v. verwonderlijk, dat tijdens de vele gesprekken over het wiskundeprogramma voor de B-richtingen, men behoefte gevoelde ook eens het onderwijs aan de A-richtingen te bespreken? Het tweede conferentieweekend 5/6 nov. '49 had dit thema als centraal onderwerp. Een groep deelnemers o.l.v. Dr. Bunt vond hierin aanleiding het onderwijs op het Gymnasium-α onder de loupe te nemen, hetgeen tenslotte resulteerde in de bekende boeken over de Geschiedenis der Wiskunde en der Statistiek voor de gymnasiasten-α, de instelling van commissies van Liwenagel ter nadere bestudering van het gehele wiskunde-α programma en de leerplanwijzigingen die hiervan tenslotte weer het besluit vormden. Het derde weekend van 1/2 nov. '50, dat als onderwerp: ,,Leerboek en docent in het wiskunde onderwijs'' droeg, met lezingen van Dr. Wansink en Van Hiele gaf aanleiding te menen dat de didactische belangstelling in de groep groter werd en het was dan ook geheel in de lijn van de verwachtingen, dat na de programmatische periode de didactische periode baan probeerde te breken met de vraag: ,,Op welke wijze wordt het onderwijs in de meetkunde gegeven in de eerste maanden van de eerste klas?''

Dat was het begin voor een nieuwe opbloei van het werk van de werkgroep. Allereerst kwamen korte inleidingen en preadviezen aan de orde van vele leden van de groep omtrent de wijze van aanpak van het wiskunde-onderwijs in de eerste maanden.

Langzamerhand moesten we echter over de periode van de oriëntatie heen komen en moesten we nader onder de loup nemen, de grondslagen, de richtlijnen als je het zo noemen wilt. Besprekingen over het niveaubegrip door Dr. Koning in zijn proefschrift voor het eerst aan de orde gesteld en later door Van Hiele gespecificeerd en uitgewerkt. Prof. De Groot introduceerde het begrip „motivatie" (tijdens zijn belangwekkende inleiding op het 7e weekend op 20-21 nov. '54) dat tot de huidige dag een belangrijke rol speelt in de discussies in de werkgroep. Toch meen ik, dat dit begrip ook al eerder in onze discussies een rol heeft gespeeld, misschien heb ik het mis, maar ik meen dat de inhoud van het begrip „emotionele basis" dat in de beginperiode van de naoorlogse besprekingen steeds weer opduikt voor een zeer groot deel het begrip motivatie overdekt.

Het is, zeer in het bijzonder in deze periode uit het bestaan van de werkgroep, misschien moeilijk om concrete resultaten aan te duiden die tijdens deze ontwikkeling een rol hebben gespeeld, toch meen ik dat deze worsteling om te komen tot een fundering en zeker niet in het minst de strijd die we in de groep konden meemaken tussen Van Hiele enerzijds en Dr. Bos anderzijds een periode beslaat, die van belang is geweest.

En hebben we werkelijk geen concreet resultaat? Eigenlijk wel degelijk in de twee uitstekende dissertaties van het echtpaar Van Hiele. Dissertaties die, naar ik de indruk heb steeds meer gelezen worden en waarbij ik toch nog steeds van mening ben dat de inhoud te weinig geanalyseerd is door wiskundig Nederland. In het bijzonder de dissertatie van Dieke van Hiele, die op zulk een heldere wijze praktijk en theorie hand in hand laat gaan, wil ik in dit verband graag noemen. Met de promotie van de Van Hiele's was de periode, die ik de didactische zou willen noemen nog niet ten einde, want het jaar dat daarop volgde, het jaar waarin veel uit de dissertaties nog eens aan de orde werd gesteld en besproken, moet zeker nog tot binnen deze periode gerekend worden. De sluiting van de didactische periode ligt m.i. een jaar later en valt, ik heb het in een artikel in het maandblad Vernieuwing ook al uiteengezet ongeveer samen met het zo plotselinge sterven van Dieke. Het is misschien nog te vroeg om nu reeds te wijzen op een nieuwe periode die langzaam inzet en die zich intensief gaat

bezighouden met de moderne ontwikkelingen in de wiskunde en de gevolgen hiervan op het V.H.M.O. Ik wil er hier dan ook op dit moment niet langer bij stilstaan; alhoewel ik er wel op wil wijzen dat de groep op 7 maart '59 een samenkomst had, waar echt teamwork werd verricht. Dr. Van Albada leidde het probleem van het doel van het wiskunde-onderwijs in, tegen de achtergrond van een eventuele invoering van nieuwe leerstof. Men kwam tijdens de discussie tot een verdeling van de doelen in subjectieve en objectieve en daarna trachtte men de kriteria op te stellen waaraan een nieuw onderdeel moet voldoen. Deze aanpak, die naar ik de indruk heb, duidelijk verschillend genoemd mag worden van de aanpak van andere groepen die dit probleem eveneens op hun programma hebben staan, gaat weer in de richting die ik in het begin van mijn betoog al genoemd heb, nl. het voortdurend zoeken naar een verantwoorde grondslag waaruit we moeten denken. Ik weet het D. en H., een dergelijke ontwikkeling gaat langzaam en is bovendien niet zo eenvoudig, maar dat we alleen in deze richting doordenkend tot een verantwoorde didactische ontwikkeling komen, is mijn, zij het dan misschien zeer persoonlijke, rotsvaste overtuiging.

Er zijn in deze jaren nadat het programmawerk van de groep klaar was gekomen nog wel meer ontwikkelingsmomenten te noemen die misschien minder groots zijn, maar die toch in het geheel genomen niet vergeten mogen worden.

Ik denk aan de invloed, die te bespeuren is geweest door het bezoek dat Dr. Martin Wagenschein in april 1953 aan ons land bracht. Persoonlijk ben ik indertijd zeer gegrepen geweest door zijn denkbeelden en zijn gedachten omtrent het „Exemplarische Lehren". Ik vraag me wel eens af of in dit opzicht juist voor de wiskunde niet nog meer uitgedacht kan worden, zeker weet ik dat bij de moeizame didactische pogingen in de andersoortige vakken, als b.v. geschiedenis, deze gedachten steeds meer veld gaan winnen. Ik ben persoonlijk ook zeer gegrepen geweest door zijn les die hij voor ons gaf aan een aantal leerlingen. Zonder hier over een aanwijsbaar ontwikkelingsmoment te kunnen spreken, lijkt het me zeer goed mogelijk dat dit bezoek op meer dan alleen op mij een grote indruk heeft gemaakt.

Een belangrijk moment was ook de samenkomst van maart 1955, de samenkomst tijdens welke ook de wiskunde werkgroep zich achter de voorstellen van de leerplan commissie van Wimecos plaatste. Ik hoop, mijne heren, vertegenwoordigers van Wimecos en Liwenagel, dat U het met mij eens bent, als ik zeg dat dit feit,

nl., het feit dat de drie groepen die wiskundig didactisch Nederland vertegenwoordigen in deze één waren, van zeer grote betekenis is geweest ten aanzien van het tempo, waarin de Wimecosvoorstellen tot het ons aller bekende K.B. werden omgevormd.

Ik wil hier ook noemen de twee subcommissies die uit de wiskunde-werkgroep zijn voortgekomen, ten eerste de Rekencommissie, die door de Wiskunde-Werkgroep tezamen met de coöperatie „Drukpers op school" is opgericht en die tenslotte is gekomen met een brochure „Richtlijnen voor een nieuw leerplan Rekenen op de Lagere School". Helaas ligt het werk van deze eerste commissie voor een groot gedeelte stil. Dr. Van Hiele geeft in Vernieuwing een korte analyse van de vermoedelijke oorzaak van dit stilliggen. Maar de tweede, de Film- en Filmstripcommissie bestaande uit de heren Poelman en Br. Erich die nu, zoals U bekend is, reeds een drietal filmstrips heeft ontworpen is springlevend.

D. en H., zo langzamerhand wil ik aan het slot komen van hetgeen ik hedenmiddag in Uw midden wilde leggen. Zeker is het, dat ik geen volledig beeld heb gegeven, zeker is het ook, dat het beeld dat ik voor U geschilderd heb, niet ontdaan is van een grote mate van subjectiviteit, maar ik hoop tenslotte toch, dat U uit hetgeen ik U hedenmiddag heb verteld begrepen hebt, dat ik dankbaar ben dat ik nu een 15 jaar aan het organisatorische gedeelte van het werk van deze groep leiding heb mogen geven. Dat ik dit zo zeg, dat ik dankbaar ben veel vervelend werk (postzegels plakken of adresjes slaan) hiervoor te hebben mogen verrichten, dank ik echter U, leden van de wiskunde werkgroep door de wijze waarop U steeds liet blijken hoezeer U het bestaan van deze groep en zijn activiteiten heeft gewaardeerd. Mijn dank gaat dus vooral uit naar U.

En hiermee, mijnheer de Voorzitter, hoop ik, dat U mij toestaat mijn bijdrage van hedenmiddag te mogen besluiten.

DE OPLOSSING VAN HET UITWENDIG BALLISTISCHE HOOFDPROBLEEM. I

door

Dr. W. BEVELANDER
Leraar aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda

1. *Inleiding.*

In een tweetal artikelen [1]) hebben we een en ander medegedeeld over het probleem van de luchtweerstand, zoals dit zich voordoet bij de ballistiek. Tevens brachten we het luchtgewicht, als functie van de hoogte, in een hanteerbare mathematische vorm.

De volgende stap is nu het integreren van de bewegingsvergelijkingen, of zoals men dat noemt, het oplossen van het *uitwendig ballistische hoofdprobleem.* Deze vergelijkingen, evenals de daarbij aangenomen veronderstellingen, ter vereenvoudiging van het probleem, vermeldden we reeds eerder [2]).

Aanvankelijk werden de kanonnen gebruikt om, gewoonlijk stilstaande, doelen te land te beschieten. Het probleem is dan om, bij een projectiel met een bekende *aanvangssnelheid* en een doel, waarvan de *afstand* bekend, of althans geschat is, een *uitvaartshoek* te berekenen. Verder moet, teneinde te kunnen corrigeren voor *wind* en voor de afwijkingen in de aangenomen *standaard-atmosfeer,* de hoogte van het culminatiepunt bekend zijn.

Bij de methoden, ontwikkeld voor het berekenen van *banen voor landdoelgeschut,* spreekt men gewoonlijk over *de berekening van de baan ,,uit één stuk'',* daarmede bedoelend, dat men zich hier, in het algemeen, slechts interesseert voor de *hoogte van het culminatiepunt,* voor de *totale dracht,* alsmede voor de *snelheid,* de *vluchttijd* en de *invalshoek* in het eindpunt van de baan. De gegevens voor alle andere punten van de baan zijn niet van belang.

Voor de marine komt hier al direct een complicatie bij, daar we dan steeds *bewegende* schepen hebben, die enerzijds vuur afgeven, anderzijds als doel beschouwd worden. Dit geval zullen we in onze beschouwingen niet nader bekijken.

---

[1]) Euclides jg. 35, no. V, pg. 145 en pg. 283.

[2]) Euclides jg. 35, no. V, pg. 147/148.

In de eerste wereldoorlog ontstaat, tengevolge van het optreden van vliegtuigen, de vraag om *banen* voor *luchtdoelgeschut* te bepalen. Hierbij is het noodzakelijk, dat men enkele baangrootheden, zoals de *coördinaten*, de *snelheid* en de *vluchttijd* in *ieder punt van de baan* kent. Tengevolge hiervan ontstaan de methoden, die de *baan in vakken berekenen*. De baan wordt hierbij in bogen verdeeld, waarbij men, uitgaande van bekende waarden voor enkele grootheden aan het begin van de boog, deze waarden, aan het eind van de boog berekent. De gevonden uitkomsten zijn enigszins benaderd, doch door een keuze van de grootte van de vakken heeft men hier tevens de nauwkeurigheid van de berekeningen in de hand.

2. *De keuze van de onafhankelijk veranderlijke.*

De keuze van een *onafhankelijk veranderlijke* is vooral van belang, als men de baan in vakken gaat berekenen. Als eerste eis is te stellen, dat men in staat is aan te geven tussen welke grenzen deze veranderlijke zich in het betrokken gebied beweegt. Verder moet de veranderlijke op een geschikte wijze in de differentiaal vergelijkingen voorkomen. Tenslotte is het wenselijk dat de variatie in de veranderlijke steeds hetzelfde teken heeft.

Beschouwen we nu achtereenvolgens de verschillende grootheden, die eventueel in aanmerking komen.

1° *De snelheid.*

Men kan bewijzen, dat de snelheid een minimum waarde heeft in de dalende tak. Aangezien de grootte en de plaats van dit minimum niet a priori bekend zijn, kan men bij een baanberekening in vakken, fouten maken, door bijv. als eindwaarde van de snelheid voor een vak een kleinere waarde te kiezen, dan in de baan bereikt wordt. De snelheid is dus minder geschikt, tenzij men niet verder dan het culminatiepunt rekent, ofwel als men een baan berekent, die begint met een negatieve uitvaartshoek (*bommenbanen*). Veelal wordt de *horizontale snelheidscomponent*, al dan niet met een constante vermenigvuldigd, gekozen. Men kan n.l. bewijzen, dat deze grootheid voortdurend blijft afnemen.

2° *De hellingshoek.*

De hellingshoek neemt steeds af en, zoals is aan te tonen, tot een grenswaarde van $-\pi/2$. Deze grootheid is dus zeer geschikt als onafhankelijk veranderlijke en wordt vaak gekozen.

3° *De abscis.*

De abscis neemt steeds toe. Het negatief worden van de ordinaat

geeft aan, dat het einde van de baan bereikt is. De abscis is dus ook bruikbaar als onafhankelijk veranderlijke.

4° *De ordinaat.*

De ordinaat neemt, bij een positieve hellingshoek, steeds toe. Voorbij het culminatiepunt gaat de ordinaat echter afnemen. We krijgen hier o.a. moeilijkheden met de bepaling van het culminatiepunt. Het aannemen van deze grootheid dwingt dus tot omzichtigheid. Is de uitvaartshoek negatief, dan vervalt het genoemde bezwaar.

5° *De tijd.*

Deze grootheid, die voortdurend toeneemt, is uiteraard zeer geschikt als onafhankelijk veranderlijke.

3. *De exacte ballistische hoofdvergelijking.*

We zullen de z.g. *exacte ballistische hoofdvergelijking,* die een grote rol heeft gespeeld bij de diverse integratiemethoden, eerst afleiden [3]).

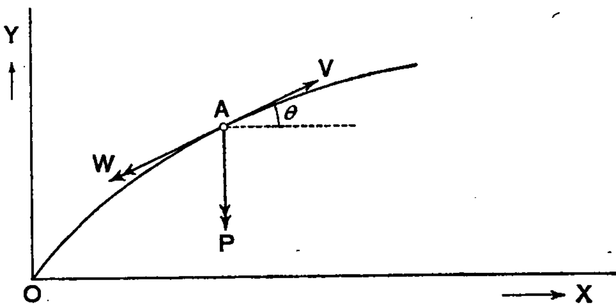


Fig. 1. Een deel van de projectielbaan, waarbij het zwaartepunt van het projectiel zich in A bevindt, terwijl de vectoren voor de snelheid (V), de luchtweerstand (W) en het projectielgewicht (P) zijn aangebracht.

De reeds eerder vermelde differentiaal vergelijkingen luiden [4]):

$$m \frac{dV_x}{dt} = - W \cos \theta \tag{1}$$

$$m \frac{dV_y}{dt} = -W \sin \theta - P \tag{2}$$

$$m \frac{dV}{dt} = -W - P \sin \theta \tag{3}$$

[3]) [1] pg. 53 t/m 56. De cijfers tussen vierkante haken hebben betrekking op de literatuur-opgave aan het eind van het artikel.

[4]) Euclides jg. 35 no. V, pg. 148.

Na substitutie van:

$$W = \text{m.c.} f(V) \text{ en } P = \text{m.g}$$

gaan deze vergelijkingen over in:

$$\frac{dV_x}{dt} = -cf(V) \cos\theta \qquad (4)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -cf(V) \sin\theta - g \qquad (5)$$

$$\frac{dV}{dt} = -cf(V) - g \sin\theta \qquad (6)$$

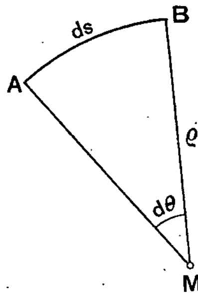


Fig. 2. AB is een deel ds van de projectielbaan. M is het kromtemiddelpunt van de baan en ρ de kromtestraal. De richtingsverandering van de snelheid, als het projectiel van A naar B beweegt, is gelijk aan $d\theta$.

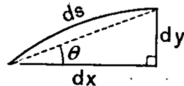


Fig. 3. Een oneindig kleine aangroeiing ds van de baan.

Vergelijking (6) is afgeleid in een meelopend assenstelsel, waarvan de oorsprong in het zwaartepunt van het projectiel is geplaatst. Deze vergelijking geldt langs de coördinaat-as, die samenvalt met de raaklijn aan de baan in het zwaartepunt. In verband met de centripetale kracht, kunnen we langs de normaal in het zwaartepunt opschrijven:

$$-P \cos\theta = \frac{mV^2}{\rho}$$

of:

$$-g \cos\theta = \frac{V^2}{\rho} \qquad (7)$$

Hierin is ρ de plaatselijke kromtestraal van de baan. Uit fig. 2 kunnen we aflezen:

$$ds = \rho \,.\, d\theta \qquad (8)$$

De formules (7) en (8) leveren ons:

$$V^2 d\theta = -g \cos \theta \, ds \tag{9}$$

We concluderen met behulp van fig. 3:

$$dx = ds \cos \theta \text{ en } dy = ds \sin \theta \tag{10}$$

De vergelijkingen (9) en (10) brengen ons als resultaat:

$$V^2 \, d\theta = -g dx \tag{11}$$

$$V^2 \, tg \, \theta d\theta = -g dy \tag{12}$$

$$V d\theta = -g \cos \theta dt \tag{13}$$

Uit (4) en (13) volgt tenslotte:

$$gd(V \cos \theta) = cVf(V)d\theta \tag{14}$$

Deze laatste vorm noemt men de *exacte ballistische hoofdvergelijking*, die samen met de vergelijkingen (9), (11), (12) en (13), een grote rol heeft gespeeld bij de oplossing van het *uitwendig ballistische hoofdprobleem*. De laatste vier vergelijkingen zijn vooral van belang, als men de hellingshoek als onafhankelijk veranderlijke kiest.

4. *De benaderde ballistische hoofdvergelijking* [5]).

Vergelijking (14) heeft het bezwaar, dat de doorgaans toegepaste *scheiding van de variabelen*, hier niet is uit te voeren. Om dit wel te kunnen doen, gaat men dan veelal over op een *benaderde vergelijking*. We schrijven (14) hiertoe in de navolgende gedaante:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{gd(V \cos \theta)}{V \cos \theta \, cf(V) \cos \theta} \tag{14a}$$

Delend door een nog nader te bepalen constante σ en $f(V)$ enigszins anders schrijvend, vinden we:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{gd\left(\dfrac{V \cos \theta}{\sigma}\right)}{\dfrac{V \cos \theta}{\sigma} \, cf\left(\dfrac{V \cos \theta}{[\cos \theta]}\right) \{\cos \theta\}}$$

Tot nu toe is de vergelijking exact gebleven. We benaderen echter door de veranderlijke grootheid $\cos \theta$ te vervangen door een constante:

$$[\cos \theta] = \sigma \text{ en } \{\cos \theta\} = \gamma \tag{15}$$

Hier worden twee verschillende symbolen voor $\cos \theta$ ingevoerd, ten-

---

[5]) [1] pg. 56—57.

einde twee keuzen te kunnen doen. De vergelijking wordt:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{gd\left(\dfrac{V\cos\theta}{\sigma}\right)}{\dfrac{V\cos\theta}{\sigma}\,cf\left(\dfrac{V\cos\theta}{\sigma}\right)\gamma} \tag{15a}$$

Substitueren we:

$$u = \frac{V\cos\theta}{\sigma} \tag{15b}$$

dan gaat (15a) over in:

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{gdu}{c\gamma u f(u)}. \tag{16}$$

In deze *benaderde ballistische hoofdvergelijking* (16) is de scheiding van de variabelen uitgevoerd. Het linkerlid levert, geïntegreerd, tg θ op. De integratie van het rechterlid geeft, in verband met de veelal gecompliceerde vorm van $f(u)$, grote moeilijkheden. We zullen laten zien, hoe dit, o.a. door Siacci, is opgelost.

Het is duidelijk dat ballistische methoden, gebaseerd op vergelijking (16), een beperkte geldigheid krijgen. Voor kleine uitvaartshoeken en dus vlakke banen, verandert cos θ niet zo veel en geeft de vervanging van deze variabele grootheid door een constante, slechts aanleiding tot geringe fouten. Voor steilere banen wordt de variatie in cos θ groter. Siacci is er in geslaagd een zodanige keuze voor σ en γ te doen, dat zijn methode, berustend op vergelijking (16), gebruikt kan worden tot uitvaartshoeken van 45°.

5. *Grondprincipes van de diverse integratiemethoden.*

Gedurende enkele eeuwen is men bezig geweest om het *uitwendig ballistische hoofdprobleem* op diverse manieren op te lossen. Gebleken is dat een volkomen exacte bepaling van projectielbanen onmogelijk is. Het is trouwens een algemeen verschijnsel, dat bij het toepassen van de wiskunde op een natuurverschijnsel, algehele exactheid doorgaans is uitgesloten. Men moet benaderingen toepassen en gaat de methoden dan zo ontwikkelen, dat de optredende fouten beneden vooraf te stellen grenzen blijven.

Afhankelijk van de manier van opzet, kunnen we de ballistische methoden in vijf groepen indelen [6]):

1°. Men gaat uit van de *exacte hoofdvergelijking* (14). Deze wordt geïntegreerd, waarbij gedurende de integratie bepaalde benaderin-

[6]) [1] pg. 68.

gen worden toegepast. De reeksontwikkelingen worden hier niet aangewend, zodat het gewoonlijk de alleroudste methoden zijn, die volgens dit principe worden ontwikkeld.

2°. Als grondvergelijking kiest men de *benaderde hoofdvergelijking* (16) en volbrengt de integratie dan verder volkomen exact. Deze manier van werken is vooral in de vorige eeuw veel gevolgd.

3°. Een methode, die speciaal in Frankrijk enige tijd naar voren is gekomen, berust op het kiezen van de *reeksontwikkeling van McLaurin,* als uitgangspunt voor de baanvergelijking. Door herhaalde differentiatie van deze reeks kunnen de benodigde vergelijkingen worden verkregen.

4°. De basis wordt gevormd door de *exacte hoofdvergelijking* (14) en de bijbehorende vergelijkingen (9), (11), (12) en (13). Bij de integratie treden gewoonlijk moeilijk oplosbare integralen op. Men gaat de *integrand* nu *in een reeks ontwikkelen,* welke reeks na een aantal termen wordt afgekapt. Daar bij deze methoden de baan in vakken wordt berekend, kan men door keuze van de grootte der vakken, de optredende fouten beperken. Speciaal de latere Franse methoden berusten op dit principe.

5°. De methoden, ontwikkeld volgens de bovengenoemde vier uitgangspunten, hadden doorgaans het meeste succes, als zij leidden tot eenvoudige rekenschema's. Het berekenen van schootstafels geschiedde aanvankelijk met behulp van *logaritmentafels.* Daarna werden *tafelrekenmachines* aangewend, met de hand bediend, die na de oorlog hun plaats moesten afstaan aan de veel snellere *elektrische tafelrekenmachines.*

Nu de *elektronische rekenapparatuur* steeds meer naar voren komt, is de nieuwere ontwikkeling in de oplossingsmethoden zodanig, dat men direct uitgaat van de *oorspronkelijke differentiaal-vergelijkingen.* Bij deze zuiver *numerieke integratiemethoden* worden dan, voor de niet te vermijden benaderingen, *interpolatieformules* gebruikt (Simpson, Cauchy, Newton, Gausz, Stirling, Bessel). Gewoonlijk moet de berekening van een vak dan één- of tweemaal herhaald worden, teneinde de gewenste nauwkeurigheid te verkrijgen. Door de snelheid, waarmede de elektronische machines werken, is dit geen bezwaar meer.

We zullen nu een aantal ballistische integratiemethoden kort beschrijven.

6. *De methode Euler-Otto* [7]).

Euler heeft in 1753 een methode ontwikkeld, uitgaande van het grondprincipe, beschreven in punt 5, 1°. Als onafhankelijk veranderlijke kiest hij de hellingshoek θ. In vergelijking (14):

$$g \cdot d(V \cos \theta) = c \cdot V \cdot f(V) \cdot d\theta,$$

substitueert hij:

$$f(V) = V^2,$$

zodat we krijgen:

$$g \cdot d(V \cos \theta) = c \cdot V^3 \cdot d\theta,$$

of:

$$\frac{d(V \cos \theta)}{(V \cos \theta)^3} = \frac{c}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \qquad (17)$$

Integreren we (17), daarbij schrijvend:

$$\xi_2(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3 \theta},$$

waarbij:

$$\xi_2(\theta) = \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \theta} + \tfrac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right),$$

dan vinden we:

$$\frac{1}{(V \cos \theta)^2} = -\frac{2c}{g} [\xi_2(\theta) - \mathrm{A}]. \qquad (18)$$

De waarde van de integratieconstante A is af te leiden uit de beginvoorwaarde, waarbij voor $\theta = \varphi$, geldt $V = V_0$. Uit (18) volgt dan:

$$A = \frac{g}{2c(V_0 \cos \varphi)^2} + \xi_2(\varphi) \qquad (19)$$

Vergelijking (18) schrijven we nu in de volgende vorm:

$$V^2 = \frac{g}{2c[A - \xi_2(\theta)] \cos^2 \theta} \qquad (20)$$

Vergelijking (9) luidt:

$$gds = -\frac{V^2 \, d\theta}{\cos \theta}$$

Met behulp van (20), eliminerend V^2, vinden we:

---

[7]) [1] pg. 69—70; [2] pg. 140 t/m 144; [3] pg. 46—47.

$$2cds = \frac{-d\theta}{[A - \xi_2(\theta)]\cos^3\theta} \tag{21}$$

Substitueren we in (21):

$$\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = d\xi_2(\theta),$$

dan is het resultaat:

$$2cds = -\frac{d\xi_2(\theta)}{A - \xi_2(\theta)}$$

of, geïntegreerd:

$$2cs = \ln[A - \xi_2(\theta)] + B. \tag{22}$$

We beschouwen nu van de baan een bepaalde boog M_1M_2 (fig. 4).

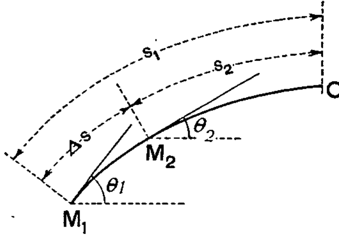


Fig. 4. Een deel van een projectielbaan in de atmosfeer, gemeten vanaf het culminatiepunt C.

Voor M_1 geldt $\theta = \theta_1$ en voor M_2 is $\theta = \theta_2$. Uit (22) volgt dan:

$$s_1 = \frac{1}{2c}\ln\frac{A - \xi_2(\theta_1)}{A}$$

en:

$$s_2 = \frac{1}{2c}\ln\frac{A - \xi_2(\theta_2)}{A}$$

of:

$$\Delta s = \frac{1}{2c}\ln\frac{A - \xi_2(\theta_1)}{A - \xi_2(\theta_2)} \tag{23}$$

Ter berekening van de coördinaten wordt geschreven:

$$\Delta x = \Delta s \cdot \cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \tag{24}$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot \sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \tag{25}$$

Uit (18) kunnen we $1/V\cos\theta$ oplossen, waarna we een formule vinden voor de vluchttijd uit:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{V\cos\theta} \tag{26}$$

Door sommatie van de vergelijkingen (23) t/m (26) vinden we nu respectievelijk waarden voor s, x, y en t.

Bij de berekening gaat men dus uit van het culminatiepunt, waarna de baan in zijn geheel gevonden wordt. De juiste waarde van de ballistische coëfficiënt zou op experimentele wijze vastgesteld moeten worden. De manier om een baan te bepalen, uitgaande van het culminatiepunt, is geheel in onbruik geraakt. Wel is het opmerkelijk, dat Euler de voorloper is geweest van de moderne ballistici, die de baan in gedeelten berekenen.

Otto heeft in 1842 tabellen samengesteld, die passen bij de theoretische opzet van Euler, vandaar dat aan de methode de naam *Euler-Otto* werd verbonden. Enkele jaren later heeft Lardillon deze tabellen uitgebreid en ze in een handiger vorm gebracht [8]), waardoor deze methode ook wel bekend is geworden onder de benaming *Otto-Lardillon*.

Daar hier van de kwadratische luchtweerstandswet is uitgegaan, kan de methode slechts gebruikt worden tot aanvangssnelheden van omstreeks 240 m/sec. Voor mortieren ligt de beginsnelheid steeds beneden deze waarde, zodat voor genoemde vuurmonden de methode tegenwoordig nog wel eens wordt aangewend.

7. *De methode Borda* [9]).

Euler neemt de ballistische coëfficiënt c in de baan constant, hetgeen er dus op neerkomt, dat hij het luchtgewicht niet met de hoogte laat afnemen. Borda stelt in 1769:

$$c = c_0 \frac{\cos\theta}{\cos\varphi},$$

zodat hier een veranderlijk luchtgewicht wordt ingevoerd. Dit gewicht neemt in werkelijkheid af met de hoogte. Echter is de breuk $\cos\theta/\cos\varphi$, met uitzondering van het allerlaatste deel van de baan, alwaar $|\theta| > \varphi$, steeds groter dan één, waardoor zijn aanname onjuist blijkt te zijn. Evenals bij Euler berust zijn theorie op de exacte

[8]) [2] pg. 577—582.
[9]) [2] pg. 147—148.

hoofdvergelijking (14) en de kwadratische luchtweerstandswet, zodat we krijgen:

$$g \cdot d(V \cos \theta) = c \cdot V^3 \cdot d\theta,$$

of, met zijn substitutie voor c:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g \cdot d(V \cos \theta)}{c_0 \dfrac{\cos \theta}{\cos \varphi} V^3 \cos^2 \theta}.$$

Schrijven we nu: $u = V \cos \theta$, dan wordt de vergelijking:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g \cos \varphi}{c_0} \cdot \frac{du}{u^3}. \qquad (27)$$

In (27) zijn de variabelen θ en u gescheiden, zodat de integratie op eenvoudige wijze is uit te voeren. Als onafhankelijk veranderlijke heeft hij de horizontale snelheidscomponent ingevoerd. Uit (27) volgt een waarde voor $\operatorname{tg} \theta$. De vergelijkingen (11), (12) en (13) kunnen gebruikt worden om x, y en t te berekenen. Uit u en θ volgt de snelheid V.

Vergelijking (27) van Borda is een voorloper van de later gebruikte benaderde hoofdvergelijking (16).

8. *De methode Bashforth* [10]).

Bashforth, reeds genoemd in verband met zijn experimenten in *Woolwich* (1866—1870) [11]), ontwikkelt een methode, die evenals Euler, uitgaat van het culminatiepunt. Voor de luchtweerstand wordt aangenomen: $f(V) = V^3$. Bashforth berekent eveneens de, voor het toepassen van zijn methode, noodzakelijke tabellen.

9. *De methode Gâvre* [12]).

In 1897 verschijnt in *Frankrijk* de methode Gâvre. Hierbij wordt eveneens uitgegaan van het in punt 5, 1° genoemde grondbeginsel. De wijze van behandelen dezer methode berust grotendeels op de manier, aangegeven door Euler. Voor het berekenen van de coördinaten wordt, in afwijking van de vergelijkingen (24) en (25), echter gesteld:

---

[10]) [1] pg. 70; [2] pg. 144—147.
[11]) Euclides jg. 35, no. V, pg. 153.
[12]) [3] pg. 53 t/m 57.

$$\Delta x = \Delta s \cdot \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{2}$$

$$\Delta y = \Delta s \cdot \frac{\sin \theta_1 + \sin \theta_2}{2}.$$

(wordt vervolgd).

LITERATUUROPGAVE

[1] W. Bevelander — Uitwendige ballistiek, diss. Leiden 1954.
[2] C. Cranz — Lehrbuch der Ballistik (1925), deel I.
[3] Dufrénois, Risser, Rousier — Les méthodes actuelles de la balistique extérieure (1921).

ONTVANGEN BOEKEN

M. G. H. Birkenhäger & H. J. D. Machielsen, *Nieuw Algebra-boek-II*, 15e dr. P. Noordhoff, Groningen. Ing. *f* 2,25, geb. *f* 2,90.

Van Thijns Wiskundige Leergang, *Leerboek der vlakke driehoeksmeting*, 26e dr. door E. J. Wasscher. J. B. Wolters, Groningen. Ing. *f* 4,50. geb. *f* 5.25. De druk is gelijk aan de vorige.

Dr. P. G. J. Vredenduin en Dr. A. van Haselen, *Nieuwe Algebra*, III. 5e dr. 140 blz. J. B. Wolters, Groningen. Ing. *f* 3,50. Op enkele kleine wijzigingen na gelijk aan de vorige druk.

Bos en Lepoeter, *Wegwijzer in de Meetkunde* II, 6e druk, 1961. J. M. Meulenhoff, Amsterdam. Ingen. *f* 4,90. Deze druk is, op enkele correcties na, gelijk aan de vorige.

B. Coster, Dr. A. van Dop en Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe Algebravraagstukken*, 2e druk. J. B. Wolters' Uitgeversmij, Groningen. Ing. *f* 2,10. Deze druk is vrijwel dezelfde als de eerste.

P. Wijdenes, *Algebra voor M.U.L.O.* 2de stukje (examenuitgave voor A). 22ste druk, gek. *f* 2,90. P. Noordhoff, Groningen.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Nieuw Algebraboek IVA*, 5de druk, ing. *f* 2,25. P. Noordhoff, Groningen.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Goniometrie en Grafieken voor het examen M.U.L.O.-B*, 6de uitgebreide druk, *f* 1,90. P. Noordhoff, Groningen.

HET REKENKUNDIG ALFABET

door

Dr. C. J. Vooijs,
's-Gravenhage

Onze cijfertekens ter aanduiding van getallen zijn pas enige eeuwen in gebruik. In de middeleeuwen en ook nog daarna bediende men zich van de zogenaamde Romeinse cijfers. Dit systeem was bij grotere getallen en bij rekenkundige bewerkingen omslachtig en tijdrovend. Wij, die „het zo heerlijk ver gebracht hebben", kunnen ons moeilijk de betekenis indenken van de vernieuwing, die Fibonacci in 1202 heeft voorgesteld. In zijn belangrijke Abbacus [1]) stelt hij nieuwe cijfers voor n.l. de zogenaamde indisch-arabische, die wij nog gebruiken. Grootgebracht in 't Arabische taalgebied, heeft hij zich van deze cijfers op de hoogte kunnen stellen.

De Latijnse tekst, waarin dit voorstel vervat is, heeft dus het karakter van een belangrijk historisch document. De Nederlandse vertaling luidt:

Incipit primum capitulum

Novem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur. Nam numerus est unitatum perfusa collectio sive congregatio unitatum, que per suos in infinitum ascendit gradus. Ex quibus primus ex unitatibus, que sunt ab uno usque in decem, constat. Secundus ex decenis, que sunt a decem usque in centum, fit. Tertius fit ex centenis, que sunt a centum usque in mille. Quartus fit ex millenis que sunt a mille usque in decem milia, et sic sequentium graduum in infinitum, quilibet ex decuplo sui antecedentis constat. Primus gradus in descriptione numerorum incipit a destera.

Secundus vero versus sinistram sequitur primum. Tertius secundum sequitur. Quartus tertium, et quintus quartum, et semper sic versus sinistram gradus gradum sequitur. Figura itaque que in primo reperitur gradu se ipsam representat, hoc est: si in primo gradu fuerit figura unitatis, unum representat; si binarii, duo; si ternarii, tria, et ita per ordinem que secuntur, usque si novenarii: novem figure quidem que in secundo gradu fuerint, tot decenas representant, quot in primo unitates, hoc est si figura unitatis secundum occupat gradum, denotat decem; si binarii, viginti; si ternarii, triginta; si novenarii, nonaginta.

Figura namque que in tertio fuerit gradu, tot centenas denotat, quot in secundo decenas, vel in primo unitates, ut si figura unitatis centum; si binarii, ducenta;

[1]) Liber Abbaci di Leonardo Pisano: Boncompagni. Roma 1857; Hoofdstuk I.

Dit zijn de negen tekens van de Indiërs:

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Met deze negen tekens en met de aanduiding 0, die in het Arabisch zephirum heet, kan men elk willekeurig getal schrijven, zoals hier verder bewezen wordt. Want een getal is een willekeurige verzameling of saamvoeging van eenheden, die met eigen treden tot in het oneindige opklimt. De eerste opklimming bestaat uit eenheden, die lopen van een tot tien. De tweede opklimming bestaat uit tientallen, die van tien tot honderd lopen. De derde uit de honderdtallen van honderd tot duizend. De vierde uit duizendtallen van duizend tot tienduizend; en zo ontstaat verder tot in het oneindige elke volgende opklimming, gevormd uit het tienvoud van de voorafgaande. Bij de weergave van getallen begint de eerste opklimming aan de rechterkant. De tweede echter volgt op de eerste naar links; de derde volgt op de tweede; de vierde op de derde; de vijfde op de vierde; en zo volgt steeds door naar links elke volgende opklimming op de voorafgaande. Dus stelt een teken in de eerste opklimming zichzelf voor d.w.z. als in de eerste opklimming het teken voor eenheid staat, betekent dat één; voor een tweetal twee; voor een drietal drie en zo achtereenvolgens op de rij de andere tot het negental toe;

si ternarii, trecenta, et novenarii, nongenta. Ipsa igitur que fuerit in quarto gradu tot millenas quot in tertio centenas, aut in secundo decenas, vel in primo unitates denotat; et sic semper mutando gradum, numerus decuplando ascendit. Et ut hoc quod dictum est lucidius declarescat, ipsum cum figuris ostendatur. Si figura septenarii fuerit in primo gradu, et ternarii in secundo, ambe insimul 37 denotant; vel econtra: figura ternarii in primo et septenarii in secundo, 73 denotabunt. Item si figura quaternarii fuerit in primo, et unitatis in secundo sic 14, nimirum XIIII. denotabunt: vel si figura unitatis fuerit in primo, et quaternarii in secundo sic 41, denotabunt XLI. Rursus in primo 72 [1], et in secundo [2]), faciunt 27; contrarium enim facit 72. Si autem septuaginta tantum scribere voluerit, ponat in primo gradu 0. et post ipsum ponat figuram septenarii, sic 70; si octuaginta sequatur zephyrum figuram [3]) octonarii six 80; hac itaque demonstratione quemlibet numerum a decem usque in centum cum duabus figuris scribere potes. Cum tribus vero a centum scribitur usque in mille; ut si figura octonarii fuerit in primo, et quinarii in secundo, et unitatis in tertio 158, centum quinquaginta octo denotabunt; et econverso: si figura unitatis fuerit in primo, et quinarii in secundo, et octonarii in tertio 851, octigenta et quinquaginta unum denotabunt; vel econtra: si figura octonarii fuerit in primo, et unitatis in secundo, et quinarii in tertio, denotabunt 518. Item si permutatim figura quinarii fuerit in primo, octonarii in secundo, et unitatis in tertio, denotabunt 185. Item si figura unitatis fuerit in primo, octonarii in secundo et quinarii in tertio, nimirum denotabunt 581: tres vero unitates sic 111, centum

---

[1]) lees: 7 [2]) lees: secundo 2 [3]) lees: figura

maar de negen tekens, die in de tweede opklimming voorkomen, duiden daar evenveel tientallen aan, als in de eerste eenheden; dus wanneer het teken voor eenheid in de tweede opklimming staat, betekent het tien; het teken voor tweetal twintig; het teken voor drietal dertig; het teken voor negental negentig.

Het teken in de derde opklimming n.l. geeft zoveel honderdtallen aan, als tientallen in de tweede of eenheden in de eerste; bijv. het teken voor eenheid honderd; voor tweetal tweehonderd; voor drietal driehonderd en voor negental negenhonderd. Dus geeft hetzelfde teken in de vierde opklimming evenveel duizendtallen aan, als in de derde honderdtallen of in de tweede tientallen of in de eerste eenheden; op die manier klimt een getal op in tienvoud door voortdurende verandering in de opklimming. Om dit betoog duidelijker te maken, zal ik hetzelfde met cijfers laten zien. Wanneer in de eerste opklimming een zevental staat en in de tweede een drietal geven ze samen 37 aan; daarentegen: het teken voor drietal in de eerste en voor zevental in de tweede geven 73. Eveneens dit: Wanneer het teken voor viertal in de eerste opklimming staat en voor eenheid in de tweede, zal dit betekenen 14, n.l. XIIII; of wanneer het teken voor eenheid in de eerste opklimming staat en voor

undecim faciunt. Verum si quinquaginta [1]) tantum scribere volueris, in primo et in secundo gradu ponas zephyra, et in tertio figuram quinarii hoc modo 500; et sic cum duobus zephyris quem libet centenariorum numerum scribere poteris. Et si centenaria cum decenis sive unitatibus scribere volueris, ponas in primo gradu zephyrum, in secundo decenas, et in tertio centenas quas volueris. Verbi gratia: si in primo gradu fiat zephyrum, et in secundo figura novenarii, et in tertio binarii, denotabunt 290. Si autem absque decenis centenaria cum unitatibus scribere volueris, pones in secundo gradu, scilicet in loco decenarii zephyrum, et in primo numerum unitatum quem volueris, et in tertio centenariorum: ut si in primo fuerit figura novenarii, et in secundo zephyrum, et in tertio binarii 209; et sic secundum supradictam demonstrationem qualem volueris, numerus a centum usque in mille scribes cum tribus figuris. Cum quattuor namque a mille usque in decem milia, ut in sequenti cum figuris numeris super notatis ostenditur.

M.I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMMDC	MMM	MCXI	MCCXXXIV	MMMMCCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	3000	1111	1234	4321

[1]) lees: quingenta

viertal in de tweede geeft dat aan 41, XLI. Eveneens stellen 7 in de eerste en 2 in de tweede opklimming 27 voor, want het omgekeerde is 72.

Wanneer men echter alleen zeventig wil schrijven, moet men in de eerste opklimming 0 zetten en daarnaast het teken voor zevental, dus 70; bij tachtig moet op de 0 volgen het teken voor achttal, dus 80: volgens deze aanwijzing kan men dus ieder getal van tien tot honderd met twee tekens schrijven. Met drie tekens echter schrijft men van honderd tot duizend; bijv. wanneer het teken voor achttal in de eerste, voor vijftal in de tweede en voor eenheid in de derde opklimming staat, betekent dat honderd acht en vijftig 158; omgekeerd wanneer het teken voor eenheid in de eerste, voor vijftal in de tweede en voor achttal in de derde opklimming staat, betekent dat achthonderd één en vijftig 851; daarentegen wanneer het teken voor achttal in de eerste, voor eenheid in de tweede en voor vijftal in de derde opklimming staat, betekent dat 518; wanneer eveneens het teken voor vijftal nu in de eerste, voor achttal in de tweede en voor eenheid in de derde opklimming staat, betekent dat 185. Wanneer het teken voor eenheid in de eerste, voor achttal in de tweede en voor vijftal in de derde opklimming staat betekent het n.l. ook weer 581; drie eenheden zo geschreven 111 betekenen honderd elf. Maar wanneer men alleen maar vijf honderd wil schrijven, moet men in de eerste en tweede opklimming een 0 zetten, en in de derde het teken voor vijftal op deze wijze: 500; zo kan men met twee nullen alle honderdtallen schrijven. Wanneer men honderdtallen met tientallen maar zonder eenheden wil schrijven, zet men in de eerste opklimming een nul, in de tweede de tientallen en in de derde de honderdtallen, die men wil aangeven. Bijv. wanneer in de eerste opklimming een nul staat, in de tweede het teken voor negental en in de derde het teken voor tweetal, betekent dit 290. Wanneer men echter honderdtallen plus eenheden maar zonder tientallen wil schrijven, moet men in de tweede opklimming, n.l. op de plaats van het tiental een nul zetten, in de eerste het aantal eenheden dat men bedoelt, en in de derde opklimming het aantal honderdtallen: bijv. wanneer in de eerste opklimming het teken voor negental staat, in de tweede een nul, en in de derde het teken voor tweetal: 209; volgens deze gedachtengang kan men elk denkbaar getal van honderd tot duizend met drie tekens schrijven. Met vier n.l. een getal van duizend tot tien duizend, zoals duidelijk wordt uit de volgende tekening — boven de tekens zijn de getallen aangegeven.

M.I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMMDC	MMM	MCXI	MCCXXXIV	MMMMCCCXXI
1001	2023	3022	3020	5600	3000	1111	1234	4321

Zo moet men ook bij de overige getallen te werk gaan. Want met vijf tekens worden alle getallen geschreven van tienduizend tot honderdduizend. Met zes tekens van honderdduizend tot duizend duizend; en zo verder door het aantal tekens te vergroten, klimt het getal geleidelijk tot het tienvoudige.

BOEKBESPREKING

Th. Kahan, *Précis de physique théorique moderne* (Tome premier, volumes I et II), Presses Universitaires de France, 108, boulevard Saint-Germain, Paris, 1960.

De zojuist verschenen boekjes van Th. Kahan over theoretische natuurkunde vallen enerzijds in de lijn van de grote Franse traditie van wiskundig getinte leerboeken voor het universitair onderwijs, maar brengen anderzijds een fundamentele vernieuwing in de wijze van behandelen van de stof, die zeer origineel is en, ook buiten Frankrijk, nog niet heeft plaatsgevonden. Het is namelijk overal de gewoonte om op het elementaire, universitaire niveau de natuurkunde te doceren als samenstel van een aantal gebieden genaamd b.v. warmte, elektriciteit, magnetisme, mechanica, optica en atoomstructuur, en dan vervolgens op het meer gevorderde niveau een indeling te maken in quantummechanica, elektromagnetisme, statistische mechanica veldentheorie, stromingsleer e.d.. Geen van beide methoden is aangepast aan de wijze waarop de moderne theoretische natuurkunde is opgebouwd. Kahan heeft daarom getracht, en hij is daarin mijns inziens goed geslaagd, de indeling meer adequaat te maken, d.w.z. hij heeft zo radicaal mogelijk de klassieke (dat is de niet-quanteuze) natuurkunde gesplitst van de quantumtheorie. In het hier besproken eerste deel, dat uit twee handzame bandjes bestaat van tezamen 687 bladzijden, komt de gehele klassieke natuurkunde aan de orde. Het geheel omvat vijf hoofdgebieden: 1⁰ de klassieke (non-relativistische en relativistische) mechanica, 2⁰ de klassieke veldentheorie (continue media, eigenlijke veldentheorie, elektromagnetisme), 3⁰ de wisselwerking van straling en materie, 4⁰ de klassieke statistica en 5⁰ de algemene relativiteitstheorie. Deze opzet is naar mijn mening van bijzondere didactische waarde: de student en de leraar die zich willen inwerken in de moderne natuurkunde vinden in Kahan's werk een vrijwel volledig maar toch compact beeld. Aan wiskundige kennis wordt slechts de elementaire analyse bekend verondersteld; alle andere wiskundige hulpmiddelen worden ontwikkeld waar ze in de theorie nodig zijn.

Het lijkt me van belang om ook enkele woorden te wijden aan detailpunten. De behandeling van de hoofdzaken der vectorrekening en tensoranalyse geschiedt op heldere wijze en in een vroeg stadium. Fraai en paedagogisch goed opgezet zijn de behandeling van het klassieke veld in het algemeen en van het elektromagnetische veld in het bijzonder. Op eenvoudige wiskundige wijze wordt de theorie van golfpijpen en trilholten, van belang o.m. voor radar, ontwikkeld. Gebruikt worden zowel het Giorgi-stelsel (in de praktische natuurkunde in zwang) en het stelsel van Gauss, dat in de meeste zuiver-wetenschappelijke verhandelingen wordt toegepast. Bevredigend is ook dat de moderne theorie van de Brown-beweging geschetst wordt en dat Markoff-ketens ter sprake komen.

De theorie der continue media is niet zo mooi in het geheel ingepast. Nergens blijkt daar dat visceuze stroming bij de onomkeerbare verschijnselen behoort. Ook op enkele punten van de elektromagnetische theorie had ik liever een iets andere behandeling gezien: de theorie der multipolen had iets korter geformuleerd kunnen zijn, de afleiding van de Maxwell-vergelijkingen uit de Lorentz-vergelijkingen volgt nog de oude methode zonder fundamentele statistica, de ponderomotische kracht bevat alleen het effect van ladingen en stromen, niet van polarisaties. In het hoofdstuk over de statistische mechanica worden de eigenschappen van de samenhangende materie (zoals de toestandsvergelijking, de transportverschijnselen en de elektrische en magnetische eigenschappen van gassen, vloeistoffen en vaste stoffen) niet afgeleid. Ook het veeldeeltjesprobleem komt niet ter sprake. Misschien worden deze problemen in het te verschijnen deel over quantumtheorie behandeld: zij hebben echter ook een klassiek aspect dat van groot belang is. Loffelijk is het feit dat grote aandacht wordt besteed aan het probleem van de onomkeerbaarheid, al zijn niet alle discussie-opmerkingen relevant.

De schrijver heeft voorts een wel wat vergaande opvatting van wat in het „domaine public" valt. Zijn bronnen zijn voor de ingewijden vrij gemakkelijk te herkennen, maar wat meer namen van auteurs der behandelde theorieën zouden niet misstaan hebben. Nu moeten we het doen met een groot aantal motto's, door de schrijver „elysisch colloquium" genoemd, voor een aanzienlijk deel ontleend aan filosofen, die nu niet zo heel veel verhelderends over de natuurwetenschap beweerd hebben.

Wegens zijn opzet en wegens de rijkdom aan bondige en complete behandelingen der moderne problemen is dit werk zeer aan te bevelen. Met belangstelling zie ik uit naar het tweede deel waarin de quantumtheorie in de wijdste zin behandeld zal worden.

S. R. de Groot

A. Tarski, *Introduction à la logique*. Collection de logique mathématique, série A, XVI. Gauthier-Villars, Paris — E. Nauwelaerts, Louvain, 1960; XV + 224 blz.

De laatste jaren wint de overtuiging hoe langer hoe meer veld, dat het voor de wiskundeleraar noodzakelijk is enige kennis van de mathematische logica te hebben om die in zijn onderwijs te kunnen uitdragen. De grote moeilijkheid voor velen is, dat ze bij hun universitaire opleiding nauwelijks iets over logica gehoord hebben, terwijl het niet eenvoudig is boeken te vinden, die een gemakkelijk leesbare en toch wetenschappelijk verantwoorde inleiding in dit vak geven. Het is een grote verdienste van Tarski, dat hij, die toch een van de grootste mannen op het gebied van de mathematische logica is, zich de moeite heeft gegeven de literatuur met een glasheldere inleiding in de logica te verrijken, die voor elke mathematisch geschoolde beginneling begrijpelijk is. De grote waarde van dit boek blijkt ook al daaruit, dat het vertaald is in het Duits, Engels, Russisch, Spaans, Nederlands, Hebreeuws en thans ook in het Frans (de oorspronkelijke uitgave is in het Pools geschreven).

Het boek bestaat uit twee delen: het eerste deel gaat over de elementen van de logica en de deductieve methode, het tweede over toepassingen van de logica en de methodologie op de constructie van wiskundige theorieën. Ik doe slechts enkele grepen uit de inhoud. Na een uitvoerige bespreking van de rol, die variabelen spelen, volgt een uiteenzetting over de propositionele logica. Uitnemend is hier de vergelijking van het logische gebruik van „of" en „volgt uit" met het gebruik van deze termen in het normale spraakgebruik. Hierna wordt uiteengezet, wat het eigenlijke is van de relatie „identiek" en wordt deze relatie vergeleken met de

gelijkheidsrelatie uit de algebra en uit de meetkunde. Verzamelingen en relaties (incl. functies en operatoren) worden besproken en de elementaire eigenschappen ervan komen ter sprake. Het eerste deel wordt afgesloten met een hoofdstuk over de deductieve methode, waarin ook de eisen, waaraan een axiomastelsel dient te voldoen, onderzocht worden.

In het tweede deel vindt men een praktische toepassing van hetgeen men in het eerste deel heeft kunnen leren. De schrijver gaat daartoe uit van het volgende axiomastelsel voor de theorie van de reële getallen.

Axioma 1. $x = y$ of $x < y$ of $x > y$.
Axioma 2. Als $x < y$, dan $y \nless x$.
Axioma 3. Als $x > y$, dan $y \ngtr x$.
Axioma 4. Als $x < y$ en $y < z$, dan $x < z$.
Axioma 5. Als $x > y$ en $y > z$, dan $x > z$.
Axioma 6. Bij elke y en z bestaat er een x zo, dat $x = y + z$.
Axioma 7. $x + y = y + x$.
Axioma 8. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
Axioma 9. Bij elke x en y bestaat er een z zo, dat $x = y + z$.
Axioma 10. Als $y < z$, dan $x + y < x + z$.
Axioma 11. Als $y > z$, dan $x + y > x + z$.

Deze axioma's zijn het uitgangspunt van een serie eenvoudige deducties. Daarna komen methodologische kwesties aan de orde. Het axiomastelsel is niet onafhankelijk: de axioma's 5, 6 en 11 blijken uit de andere afleidbaar te zijn. De overige axioma's zijn echter wel onafhankelijk. Voor een van hen wordt het bewijs daarvan uitgevoerd. Verder blijkt de grondrelatie $>$ definieerbaar te zijn door middel van $<$, waarna axioma 3 nog weggelaten kan worden. Daarna geeft de auteur een nog eenvoudiger axiomastelsel, dat uit slechts vijf axioma's bestaat en met het bovenstaande stelsel ekwivalent is.

Dat het stelsel contradictieloos is, blijkt daaruit, dat niet elk oordeel afleidbaar is. Zo kan uit de axioma's niet afgeleid worden, dat er twee verschillende getallen bestaan. Volledig is het stelsel niet: van de propositie „er is bij iedere x een y zo, dat $x = y + y$" kan de geldigheid niet worden afgeleid; van het tegendeel echter evenmin.

Het gegeven stelsel is ontoereikend voor het funderen van de theorie van de reële getallen. De auteur besluit met het geven van twee stelsels, die hiertoe wel toereikend zijn. Het ene fundeert de reële getallen als een dicht en continu geordende abelse groep, het andere als een geordend lichaam.

Een groot aantal vraagstukken kunnen de lezer ertoe brengen zich nader in de problemen te verdiepen.

Ik hoop, dat velen geprikkeld mogen worden dit boek als uitgangspunt te kiezen om met de zo interessante problemen van de mathematische logica in contact te komen.

P. G. J. Vredenduin

Dr. C. P. S. van Oosten, *Wiskundeonderwijs op de middelbare school, enige opmerkingen en wensen.* Nr. 4 van de Voordrachten gehouden voor de Gelderse leergangen te Arnhem. J. B. Wolters, Groningen, 1960. ƒ 1,50.

Nadat spr. in het algemeen over enige aspecten van de wiskunde gesproken heeft, daarbij gewezen heeft op het spelelement en verder opgemerkt heeft dat vele van de problemen der wiskunde aan het praktische leven ontleend zijn, zonder dat de wiskunde daarin opgaat, stelt hij de vraag: Wat is de betekenis van het vak

voor en in het middelbaar onderwijs? In aansluiting aan Mevrouw Ehrenfest ziet hij de voornaamste doelstelling van het wiskundeonderwijs in de ontwikkeling van het logisch en kritisch denken. Hoewel hij in de litteratuurlijst zijn bron noemt n.l.: T. Ehrenfest-Afanassjewa en H. Freudenthal, Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen? (Muusses, Purmerend, 1951) had hij er m.i. goed aangedaan iets te vermelden van de kritiek van prof. Freudenthal op het standpunt van mevrouw Ehrenfest (vgl. pag. 15 en 25 van het aangehaalde werkje).

Naast deze ontwikkeling van het logisch denken moet de lust tot het oplossen van problemen ontwikkeld worden. In dit verband wijst hij op de betekenis van het werk van Van Hiele en vermeldt een experiment door coll. A. J. Th. Maassen en hemzelf gedaan, om met sets van houten staafjes, die aan elkaar vastgemaakt konden worden, leerlingen allerlei figuren te laten opbouwen en hen eenvoudige eigenschappen daarvan te doen ontdekken.

Verder maakt hij veel opmerkingen die voor ons onderwijs van groot belang zijn, o.a. hoe bij de behandeling van de logaritmen vooral met het rekenwerk *begonnen* moet worden. Men zie hiervoor vooral: Ir. D. J. Kruijtbosch, Avontuurlijk wiskunde-onderwijs; Brusse's uitgeversmaatschappij, Rotterdam, 1936.

Vooral beginnende collega's kunnen hun voordeel doen met de opmerkingen in de voordracht van dr. Van Oosten gemaakt.

Ten slotte. Is het helemaal juist wat op pag. 5 staat? „Na vele-mislukte-pogingen heeft Gauss een meetkunde opgebouwd, waarin het parallellenaxioma niet werd gebruikt." Vanaf 1829 had Nikolaj Lobatschefsky reeds zijn onderzoekingen gepubliceerd; Johan Bolyai in 1831 de zijne. Pas in 1900 bleek, bij de verschijning van deel 8 van Gauss' Werke, dat Gauss hieraan ook gewerkt had. Uit zijn correspondentie blijkt dat hij reeds vroeg zijn gedachten over het parallelaxioma had laten gaan maar dat hij er pas in 1831 toe gekomen is hiervan iets op te schrijven. Zie H. J. E. Beth, Inleiding in de niet-Euclidische meetkunde op historischen grondslag, Noordhoff, Groningen, 1929.

J. F. Hufferman

DE WIMECOS-LEESPORTEFEUILLE

De lezers van *Euclides* worden er nog eens aan herinnerd, dat er een leesportefeuille van didactische tijdschriften bestaat, die alle leden van *Wimecos* en alle leden van *Liwenagel* in staat stelt tegen relatief geringe kosten op de hoogte te blijven van belangrijke buitenlandse literatuur. Er is in de loop der jaren een kring van trouwe lezers ontstaan, maar er zijn ongetwijfeld nog vele lezers van *Euclides* die door onbekendheid met de portefeuille de gelegenheid zich doorlopend over het wiskunde-onderwijs in het buitenland te laten oriënteren, voorbij laten gaan. Niet ieder is in staat zich persoonlijk te abonneren; de abonnementsprijzen zijn over het algemeen genomen naar Nederlandse maatstaven zeer hoog. Zij die de gelegenheid missen in een universiteitsleeszaal de buitenlandse tijdschriften in te zien, vinden in de tijdschriften van de „*Wimecos-leesportefeuille*" een belangrijk hulpmiddel om

kennis te nemen van de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in het buitenland.

Opgenomen zijn:

a. *Elemente der Mathematik*;
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts; Basel; Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer; verschijnt om de twee maanden;

b. *The Mathematical Gazette*; edited by the Mathematical Association; London; verschijnt 5 maal per jaar;

c. *The Mathematical Teacher*; official journal of the National Council of Teachers of Mathematics; New York; verschijnt 8 maal per jaar;

d. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; Organ des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts; Bonn-Frankfurt; verschijnt om de 2 maanden;

e. *Paedagogische Studiën*; maandblad voor opvoeding en onderwijs; Groningen; verschijnt maandelijks;

f. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität; verschijnt op ongeregelde tijden; omvang ongeveer 350 blz. per jaar;

g. *School Science and Mathematics*;
journal for all science and mathematics teachers; Menasha (U.S.A.); verschijnt 8 maal per jaar;

h. *Mathematica & Paedagogia*;
driemaandelijks tijdschrift uitgegeven door de Belgische Vereniging van Wiskundeleraren; Antwerpen; verschijnt 4 maal per jaar;

i. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*; Parijs; verschijnt 8 maal per jaar;

j. *Nieuw Archief voor Wiskunde*;
uitgave van het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

Het leesgeld bedraagt voor één tijdschrift *f* 2,50 per jaar, met uitzondering van de Uitgaven van het Wiskundig Genootschap die gratis circuleren; wie meer dan één tijdschrift wenst te lezen, betaalt *f* 2,— voor elk tijdschrift.

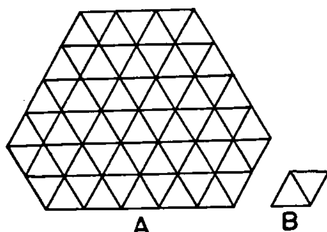
Deelnemers aan de portefeuille kunnen tevens bij *Dr. Joh. H. Wansink*, Julianalaan 84, Arnhem, vorige jaargangen ter lezing ontvangen; er zijn reeds meer dan 50 exemplaren beschikbaar.

Aanmelding voor de „Wimecos-leesportefeuille" bij *G. J. J. Boost*, Parklaan 107 A, te Roosendaal (N. Br.), bij wie ook nadere inlichtingen zijn te verkrijgen.

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

51.



Opgave. De bovenstaande figuur A, die uit 64 congruente gelijkzijdige driehoekjes bestaat, op te bouwen uit 32 figuurtjes B, die uit 2 van deze driehoekjes bestaat.

52. Opgave. De spelers van twee tennisteams spelen wedstrijden tegen elkaar. Gegeven is, dat elke twee spelers van team A precies één gemeenschappelijke tegenspeler hebben en dat het zelfde geldt voor elk paar spelers van team B. Bovendien is gegeven, dat de som van de tegenspelers van een paar spelers van team A nooit gelijk is aan het gehele team B en dat hetzelfde geldt voor elk paar spelers van team B. Er worden alleen singles gespeeld.

Bewijs, dat alle spelers evenveel wedstrijden spelen.

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

49. Kies de temperatuurschaal zo, dat de temperatuur van de omgeving 0 is. De afkoeling geschiedt dan volgens

$$\frac{dT}{dt} = -T,$$

zodat we krijgen

$$T = T_0\, e^{-t},$$

waarin T_0 de begintemperatuur van de koffie is. Als we voor T_0 verschillende waarden kiezen, hebben de bijbehorende functies T een constante verhouding.

Gieten we de room in de koffie, dan zal ongeacht het tijdstip, waarop we dat doen, de temperatuur van de koffie met een vaste constante c vermenigvuldigd worden. D.w.z. dat we ongeacht het tijdstip, waarop de room in de koffie gegoten wordt, op de grafiek terecht komen, die correspondeert met een begintemperatuur cT_0 en verder op deze grafiek blijven. Het tijdstip is dus van geen belang.

50. Beide zijn evenveel verontreinigd, want beide glazen zijn weer even vol als aan het begin.

Het adres van de redactiesecretaris is gewijzigd en luidt thans:

A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37, Hoogezand